Corrigés détaillés

Quatre modèles originaux de devoir de contrôle n° 1

Baccalauréat · Sciences techniques · Premier trimestre

0.1 Exercice 4 — Lecture graphique

La droite verticale d'asymptote est $x = 2$. La branche gauche descend vers $-\infty$, et la branche droite monte vers $+\infty$: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.
La droite oblique est $D : y = x + 2$. Puisque $f(x) - (x+2) = \frac{1}{x-2} \to 0$ aux deux infinis, les deux limites demandées valent 0. Les asymptotes sont $x = 2$ et $y = x + 2$. La courbe est sous D pour $x < 2$ et au-dessus pour $x > 2$.

Méthode de lecture. Chaque réponse développe le raisonnement attendu : domaine, calculs, signe ou propriété utilisée, puis conclusion. Les sujets sont des créations d'entraînement originales ; ce document corrige uniquement les quatre modèles présentés dans ce dossier.

1 Modèle 1

1.1 Exercice 1 — QCM : réponses et justifications

1) **B.** La racine impose $x - 2 \geq 0$, donc le domaine est $[2, +\infty[$. 2) **A.** $u(2) = 3\sqrt{0} - 3 = -3$. 3) **B.** Pour $h > 0$, le taux vaut $\frac{3+h}{\sqrt{h}}$ et tend vers $+\infty$; la demi-tangente est verticale. 4) **C.** $|z| = \left|1 - i\sqrt{3}\right| = \frac{2}{\sqrt{1+3}} = 1$.

1.2 Exercice 2 — Étude de u

La racine impose $x - 2 \geq 0$, donc $D_u = [2, +\infty[$. La fonction racine est continue sur cet intervalle et les opérations qui définissent u préservent la continuité ; ainsi u est continue sur D_u. À l'extrémité, $u(2) = (2+1)\sqrt{0} - 3 = -3$.
Pour $h > 0$:

$$\frac{u(2+h) - u(2)}{h} = \frac{(3+h)\sqrt{h} - 3 + 3}{h} = \frac{3+h}{\sqrt{h}}.$$

Quand $h \to 0^+$, le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 0^+ ; le quotient tend donc vers $+\infty$. La demi-tangente en $A(2, -3)$ est verticale ; son support est la droite d'équation $x = 2$.
Pour $x > 2$, la règle du produit donne :

$$u'(x) = \sqrt{x-2} + \frac{x+1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x-2}}.$$

Le dénominateur est positif et $x - 1 > 0$ sur $]2, +\infty[$. Ainsi $u'(x) > 0$: u est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. De plus, le terme $(x+1)\sqrt{x-2}$ tend vers $+\infty$, donc $u(x) \to +\infty$. Comme $u(2) = -3 < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance assurent l'existence d'un unique zéro α.
Vérifions l'encadrement. On a $u\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2\sqrt{2}} - 3 < 0$, car $7 < 6\sqrt{2}$, ce qui est vrai puisque $49 < 72$. D'autre part, $u\left(\frac{11}{4}\right) = 15\frac{\sqrt{3}}{8} - 3 > 0$, car $5\sqrt{3} > 8$, équivalent à $75 > 64$. La croissance donne donc $\frac{5}{2} < \alpha < \frac{11}{4}$: l'intervalle a bien une amplitude de $\frac{1}{4} = 0,25$.
Enfin $u(\alpha) = 0$ signifie $(\alpha+1)\sqrt{\alpha-2} = 3$. Les deux membres étant positifs, on peut élever au carré :

$$(\alpha+1)^2(\alpha-2) = 9 \Leftrightarrow \alpha^3 - 3\alpha - 2 = 9 \Leftrightarrow \alpha^3 - 3\alpha - 11 = 0.$$

1.3 Exercice 3 — Nombres complexes

Rationalisons le dénominateur :

$$z=\frac{2}{1-i\sqrt{3}}=2\frac{1+i\sqrt{3}}{4}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi $|z|=1$ et un argument de z est $\frac{\pi}{3}$; donc $z=e^{i\frac{\pi}{3}}$. Alors $z^3=e^{i\pi}=-1$, $z^6=e^{i2\pi}=1$, $z^9=-1$ et $z^{12}=1$. En regroupant les termes opposés, $z^3+z^6+z^9+z^{12}=0$.
Comme $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, on obtient $w=(1-i)z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.
Le calcul algébrique donne aussi $w=\frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{i(\sqrt{3}-1)}{2}$.
En identifiant les parties imaginaires, $\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Ainsi $\sin(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

1.4 Exercice 4 — Lecture graphique

La courbe montre une asymptote verticale d'équation $x=0$. À gauche, la branche descend sans borne ; à droite, elle monte sans borne : $\lim_{x\to0^-}f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.
La droite oblique tracée est $D:y=-x+1$. La courbe s'en rapproche aux deux extrémités ; par conséquent $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=1$ et $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=1$.
Les asymptotes sont donc $x=0$ et $y=-x+1$. Enfin, la branche située sur $]-\infty,0[$ est sous D, tandis que celle de $]0,+\infty[$ est au-dessus de D.

2 Modèle 2

2.1 Exercice 1 — QCM : réponses et justifications

1) **B.** La rationalisation donne $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$ pour $x\neq1$, donc la limite en 1 vaut $\frac{1}{4}$. 2) **C.** La dérivée est $-\frac{1}{2\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3}+2)^2}<0$; la fonction est strictement décroissante. 3) **A.** $\frac{2}{1-i}=2\frac{1+i}{2}=1+i$. 4) **B.** L'égalité des distances de $M(x,y)$ à $A(1,1)$ et $B(-1,1)$ se réduit à $x=0$.

2.2 Exercice 2 — Prolongement et dérivabilité

Pour $x\neq1$, multiplions numérateur et dénominateur par le conjugué du numérateur :

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}.$$

Cette simplification vaut pour $x\neq1$. Elle donne $\lim_{x\to1}f(x)=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}=f(1)$; la fonction est donc continue en 1.
Pour $x>0$ et $x\neq1$, la dérivée de l'expression simplifiée est

$$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+3}+2\right)^2}.$$

Il faut cependant vérifier la dérivabilité au point de raccord. Pour h tel que $h\neq0$ et h proche de 0 :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}-\frac{1}{4}}{h}=-\frac{1}{4\left(\sqrt{4+h}+2\right)^2}.$$

En faisant tendre h vers 0, on trouve $f'(1)=-\frac{1}{4(2+2)^2}=-\frac{1}{64}$. Cela coïncide avec la valeur obtenue en prolongeant la formule de la dérivée.
Le dénominateur de $f'(x)$ est positif ; ainsi $f'(x)<0$ sur $[0,+\infty[$ et f est strictement décroissante. Enfin,

$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3},\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0^+.$$

La continuité et la décroissance montrent que l'image est $]0,2-\sqrt{3}]$.

2.3 Exercice 3 — Nombres complexes

On rationalise : $z=\frac{2}{1-i}=2\frac{1+i}{2}=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Par la formule de Moivre, $z^4=\left(\sqrt{2}\right)^4e^{i\pi}=-4$, $z^8=\left(\sqrt{2}\right)^8e^{i2\pi}=16$.
Pour $v=(1+i)z$, on calcule $v=(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$. Donc $|v|=2$ et un argument de v est $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.

2.4 Exercice 3 (suite) — Lieu géométrique

Posons $z = x + iy$. L'égalité des distances devient $(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$, d'où $x = 0$. Le lieu est la droite verticale, médiatrice du segment [AB] puisque $A(1,1)$ et $B(-1,1)$.
Sur le rayon d'angle $\frac{\pi}{2}$, l'affixe s'écrit $z = it$ avec $t \geq 0$. La condition $|z| = 2$ donne $|t| = 2$, donc $t = 2$. Le point recherché a pour affixe $2i$, qui vérifie bien $x = 0$ et $|2i| = 2$.

2.5 Exercice 4 — Lecture graphique

Au voisinage de l'asymptote verticale $x = -1$, la branche gauche descend vers $-\infty$ et la branche droite monte vers $+\infty$: $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$.
La droite oblique est $D : y = -x + 2$. Comme $f(x) - (-x+2) = \frac{2}{x+1}$ tend vers 0 aux deux infinis, on a $\lim_{x \to -\infty}(f(x) + x) = 2$ et $\lim_{x \to +\infty}(f(x) + x) = 2$. Les asymptotes sont $x = -1$ et $y = -x + 2$. La courbe est sous D pour $x \leftarrow 1$ et au-dessus pour $x > -1$.

3 Modèle 3

3.1 Exercice 1 — QCM : réponses et justifications

1) **A.** La division donne $x^2 + 1 = (x-1)(x+1) + 2$. 2) **B.** En 1^+, $x - 1 \to 0^+$ et $x^2 + 1 \to 2 > 0$, donc le quotient tend vers $+\infty$. 3) **A.** Le numérateur de f' est $(x-1)^2 - 2$; ses zéros sont $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$. 4) **B.** $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$.

3.2 Exercice 2 — Limites et variations

La division euclidienne donne $x^2 + 1 = (x-1)(x+1) + 2$, d'où

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Au voisinage de 1, le numérateur de la fraction ajoutée est positif : $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.
À chaque extrémité infinie, $f(x) - (x+1) = \frac{2}{x-1} \to 0$. L'asymptote oblique aux deux infinis est donc la droite $y = x + 1$.
La règle du quotient conduit à

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif sur le domaine. Le numérateur s'annule lorsque $(x-1)^2 = 2$, donc en $a = 1 - \sqrt{2}$ et $b = 1 + \sqrt{2}$. Il est positif hors de $[a, b]$ et négatif entre a et b. En tenant compte de la coupure en $x = 1$, on obtient le tableau suivant :

Intervalle	Variation	Valeurs aux bornes
$]-\infty, a]$	Croissante	$-\infty \to 2 - 2\sqrt{2}$
$[a, 1[$	Décroissante	$2 - 2\sqrt{2} \to -\infty$
$]1, b]$	Décroissante	$+\infty \to 2 + 2\sqrt{2}$
$[b, +\infty[$	Croissante	$2 + 2\sqrt{2} \to +\infty$

Les valeurs aux points critiques se calculent avec $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}$:

$$f(a) = 2 - \sqrt{2} - \sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2},$$
$$f(b) = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}.$$

Ainsi a est un maximum local et b un minimum local. La décomposition $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}$ donne aussi $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; les limites latérales en 1 sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$.

3.3 Exercice 3 — Nombres complexes

On lit $|z| = \sqrt{1+3} = 2$. Comme z est dans le quatrième quadrant, un argument est $-\frac{\pi}{3}$; ainsi $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
Moivre donne $z^3 = 8e^{-i\pi} = -8, \quad z^6 = 64e^{-i2\pi} = 64$.
Pour le quotient, écrivons séparément numérateur et dénominateur : $z-2 = -1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i2\frac{\pi}{3}}$, $z+2 = 3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
Par conséquent, $\frac{z-2}{z+2} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}$.

3.4 Exercice 3 (suite) — Lieu géométrique

La condition exprime l'égalité des distances du point $M(x,y)$ à $O(0,0)$ et à $P(2,2)$: $x^2+y^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2$.
Après développement et simplification, $x+y=2$. Le lieu est donc la médiatrice de $[OP]$.
Sur le cercle $|z| = \sqrt{2}$, on a $x^2+y^2 = 2$. En remplaçant y par $2-x$: $x^2 + (2-x)^2 = 2 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 0$.
L'intersection est le point unique $(1,1)$, d'affixe $1+i$. Le cercle est tangent à la médiatrice en ce point.

3.5 Exercice 4 — Lecture graphique

La courbe possède une asymptote verticale $x=1$. Sa branche gauche tend vers $-\infty$ et sa branche droite vers $+\infty$: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \quad$ et $\quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.
La droite oblique tracée est $D : y = x+3$. Puisque $f(x) - (x+3) = \frac{6}{x-1} \to 0$ lorsque $x \to +-\infty$, les deux limites demandées valent 0. Les asymptotes sont $x=1$ et $y=x+3$. La courbe est sous D sur $]-\infty, 1[$ et au-dessus sur $]1, +\infty[$.

4 Modèle 4

4.1 Exercice 1 — QCM : réponses et justifications

1) **A.** Comme $\sqrt{x^2+4} > |x| \geq -x$, on a $\sqrt{x^2+4} + x > 0$. 2) **B.** La forme rationalisée $\frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x}$ tend vers 0^+ quand $x \to -\infty$. 3) **A.** La dérivée est $\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + 1$. 4) **A.** Le module de $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ vaut 1 et son argument est $\frac{\pi}{3}$; sa forme exponentielle est $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

4.2 Exercice 2 — Étude de $f(x) = \sqrt{x^2+4} + x$

La racine est définie pour tout réel, donc $D_f = \mathbb{R}$. Comme $\sqrt{x^2+4} > |x| \geq -x$, on a $f(x) > 0$ pour tout réel x.
Pour rationaliser, utilisons $\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)\left(\sqrt{x^2+4}-x\right) = 4$:

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+4} - x}.$$

Quand $x \to -\infty$, le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $f(x) \to 0^+$. Pour $x \to +\infty$, $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1+\frac{4}{x^2}} + 1 \to 2$, ce qui entraîne $f(x) \to +\infty$.
La dérivée est

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + 1.$$

Or $\sqrt{x^2+4} > |x| \geq -x$, donc $\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} > -1$ et $f'(x) > 0$. La fonction est continue et strictement croissante, avec les limites 0 et $+\infty$; son image est donc $]0, +\infty[$.
Pour résoudre $f(x) = a$, il faut d'abord $a > 0$. L'équation devient $\sqrt{x^2+4} = a - x$. En élevant au carré : $x^2 + 4 = (a-x)^2 = a^2 - 2\cdot a \cdot x + x^2$, ainsi $x = \frac{a^2-4}{2a}$. Il reste à vérifier la condition imposée avant le carré : $a - x = a - \frac{a^2-4}{2a} = \frac{a^2+4}{2a} > 0$, puisque $a > 0$. La solution satisfait donc bien l'équation initiale ; elle est unique, ce qui concorde avec la stricte croissance de f.

4.3 Exercice 3 — Racines de l'unité

On a $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
Alors $z^3 = e^{i\pi} = -1$ et $z^6 = e^{i2\pi} = 1$. Par addition, $z^3 + z^6 = 0$.

4.4 Exercice 3 (suite) — Lieu géométrique

Pour $z = x + iy$, l'égalité des distances donne $x^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2$, soit $y = 1$. Le lieu est la médiatrice du segment reliant les affixes 0 et $2i$.
L'intersection avec $|z| = \sqrt{2}$ vérifie $x^2 + y^2 = 2$. En utilisant $y = 1$, on obtient $x^2 = 1$, donc $x = 1$ ou $x = -1$. Le rayon d'angle $\frac{\pi}{4}$ impose $x = y \geq 0$; il ne retient que $x = y = 1$. Le point demandé a donc pour affixe $1 + i$.

À retenir. Pour les limites, distinguer les deux côtés d'une asymptote verticale. Pour prouver l'unicité d'une solution, articuler continuité, changement de signe et monotonie. Pour une équation obtenue après élévation au carré, vérifier ensuite le signe du membre isolé.