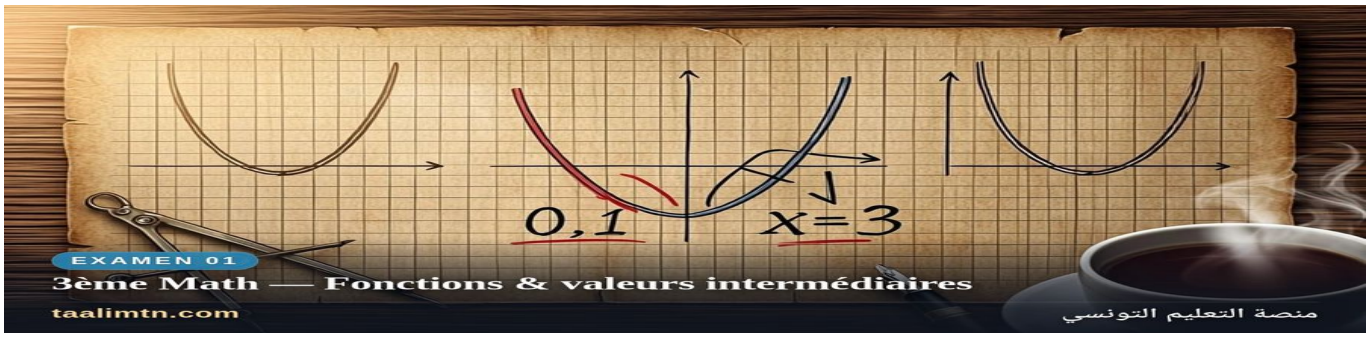

Épreuve : Mathématiques	Devoir de contrôle n° 1	Durée : 2 heures
Lycée : Lycée de l'Éducation	Niveau : 3ème année secondaire	Section : Mathématiques
Date : Samedi 15 novembre 2025	Coefficient : 4	Prof : Équipe pédagogique TA'LIM TN

Nom : _____	Prénom : _____	Classe : 3ème Math ___

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation. Une réponse sans justification n'a aucune valeur.

EXERCICES (20 points)

Exercice n° 1 — Étude de fonction et théorème des valeurs intermédiaires (7 pts)

Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par : f(x) = x + 9/x.

1°/ a- Soient a et b deux réels strictement positifs, montrer que : f(b) − f(a) = (b−a)(ab−9)/(ab).

b- Étudier alors le sens de variation de f sur chacun des intervalles]0,3] et [3,+∞[.

c- En déduire que f admet sur]0,+∞[un minimum que l'on précisera.

2°/ Soit h la fonction définie sur ℝ par : h(x) = x^3 − 3x + 1.

a- Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle [0,1].

b- Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

Exercice n° 2 — Continuité et prolongement par continuité (6 pts)

1°/ Soit g la fonction définie par : g(x) = (x^2−6x+8)/(√(x−3)−1).

a- Déterminer le domaine de définition Dg de g.

b- Montrer que, pour tout x ∈ Dg : g(x) = (x−2)(√(x−3)+1).

c- En déduire que g est prolongeable par continuité en 4 et définir ce prolongement.

2°/ Soit f la fonction définie sur ℝ par :

f(x) = (x^2−1)/(x−1) si x < 1

f(x) = 2x si 1 ≤ x < 3

f(x) = (x+m)/(x−1) si x ≥ 3

où m est un réel.

a- Montrer que f est continue en 1.

b- Déterminer la valeur de m pour laquelle f soit continue en 3.

Exercice n° 3 — Produit scalaire, barycentre et ensemble de points (7 pts)

ABC est un triangle tel que AB = 3, AC = 6 et BC = 5. I est le milieu de [AC] et J est le barycentre des points pondérés (B,2) et (C,1).

1°/ a- Montrer que AJ = (2/3)AB + (1/3)AC et que BI = (1/2)AC − AB.

b- Montrer que les droites (AJ) et (BI) sont perpendiculaires.

c- En déduire que (AJ) est la médiatrice du segment [BI].

2°/ a- Calculer AB·AC.

b- Montrer que AJ·AI = 28/3.

3°/ Soit K le point d'intersection de (AJ) et (BI). Montrer que AK = √7.

4°/ Soit l'ensemble C = {M ∈ P tel que MA^2 + MC^2 = 36}.

a- Vérifier que A ∈ C.

b- Montrer que C est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Données : AB = 3 ; AC = 6 ; BC = 5 ; I milieu de [AC] ; J barycentre de (B,2) et (C,1).

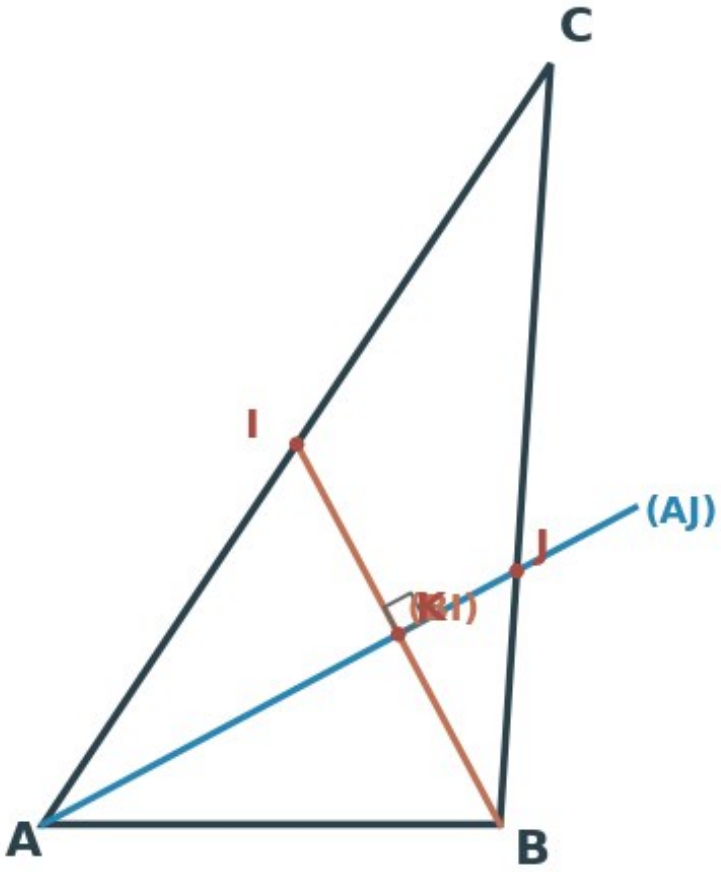

Figure 1 — Triangle ABC, droite (AJ) et médiatrice (BI) de [BI].

CORRIGÉ — Examen 01

Exercice 1 — Exercice n° 1 — Étude de fonction et théorème des valeurs intermédiaires

1°/ a- $f(b)-f(a) = (b + 9/b) - (a + 9/a) = (b-a) + 9\cdot(1/b - 1/a) = (b-a) + 9\cdot(a-b)/(ab) = (b-a) - 9\cdot(b-a)/(ab) = (b-a)\cdot(1 - 9/(ab)) = (b-a)(ab-9)/(ab)$.

b- Le signe de $f(b)-f(a)$ est celui de $(b-a)(ab-9)$ (car $ab > 0$). Sur $]0,3]$: $ab \le 9 \Rightarrow ab-9 \le 0$, donc pour $b > a$, $f(b)-f(a) \le 0$: f est décroissante sur $]0,3]$. Sur $[3,+\infty[$: $ab \ge 9 \Rightarrow ab-9 \ge 0$, donc pour $b > a$, $f(b)-f(a) \ge 0$: f est croissante sur $[3,+\infty[$.

c- f décroissante puis croissante admet un minimum en $x = 3$: $f(3) = 3 + 9/3 = 6$. Le minimum de f sur $]0,+\infty[$ vaut 6, atteint en $x = 3$.

2°/ a- h est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$ (et sur $[0,1]$). $h(0) = 1 > 0$ et $h(1) = 1-3+1 = -1 < 0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[0,1]$. De plus $h'(x) = 3x^2-3 = 3(x^2-1) < 0$ sur $[0,1[$, donc h est strictement décroissante sur $[0,1]$: la solution α est unique.

b- $h(0,3) = 0,027 - 0,9 + 1 = 0,127 > 0$ et $h(0,4) = 0,064 - 1,2 + 1 = -0,136 < 0$. Donc $\alpha \in]0,3 ; 0,4[$ (encadrement d'amplitude 0,1).

Exercice 2 — Exercice n° 2 — Continuité et prolongement par continuité

1°/ a- Dg : il faut $x-3 \ge 0$ (soit $x \ge 3$) et $\sqrt{(x-3)}-1 \ne 0$ (soit $x \ne 4$). Donc $Dg = [3,+\infty[\setminus \{4\}$.

b- Pour $x \in Dg$: $g(x) = (x^2-6x+8)/(\sqrt{(x-3)}-1) \times (\sqrt{(x-3)}+1)/(\sqrt{(x-3)}+1) = (x^2-6x+8)(\sqrt{(x-3)}+1)/((x-3)-1) = (x^2-6x+8)(\sqrt{(x-3)}+1)/(x-4)$. Or $x^2-6x+8 = (x-2)(x-4)$, donc $g(x) = (x-2)(\sqrt{(x-3)}+1)$.

c- $\lim(x\to4)\ g(x) = (4-2)(\sqrt{(4-3)}+1) = 2\times(1+1) = 4$. g est donc prolongeable par continuité en 4 en posant $\tilde{g}(4) = 4$.

2°/ a- En 1 : $\lim(x\to1,\ x<1)\ f(x) = \lim\ (x^2-1)/(x-1) = \lim\ (x+1) = 2$; $f(1) = 2\times1 = 2$. Donc $\lim f = f(1)$: f est continue en 1.

b- En 3 : $\lim(x\to3,\ x<3)\ f(x) = 2\times3 = 6$; $\lim(x\to3,\ x\ge3)\ f(x) = (3+m)/(3-1) = (3+m)/2$. f continue en $3 \Leftrightarrow (3+m)/2 = 6 \Leftrightarrow 3+m = 12 \Leftrightarrow m = 9$.

Exercice 3 — Exercice n° 3 — Produit scalaire, barycentre et ensemble de points

1°/ a- $J = \text{bary}\{(B,2),(C,1)\} \Rightarrow$ pour tout M, $3\cdot MJ = 2\cdot MB + MC$. En $M = A$: $3\cdot AJ = 2\cdot AB + AC \Rightarrow AJ = (2/3)AB + (1/3)AC$. I milieu de $[AC] \Rightarrow AI = (1/2)AC$, donc $BI = AI - AB = (1/2)AC - AB$.

b- $AJ\cdot BI = [(2/3)AB + (1/3)AC]\cdot[(1/2)AC - AB] = (1/3-1/3)(AB\cdot AC) - (2/3)|AB|^2 + (1/6)|AC|^2 = 0 - (2/3)\cdot9 + (1/6)\cdot36 = -6 + 6 = 0$. Donc $(AJ) \perp (BI)$.

c- $AI = (1/2)AC = 3 = AB$, donc A est équidistant de B et de I : A appartient à la médiatrice de [BI]. Comme $(AJ) \perp (BI)$ (question 1b) et $A \in (AJ)$, la droite (AJ) est la médiatrice du segment [BI].

2°/ a- $AB\cdot AC = (AB^2 + AC^2 - BC^2)/2 = (9 + 36 - 25)/2 = 20/2 = 10$.

b- $AJ\cdot AI = [(2/3)AB + (1/3)AC]\cdot[(1/2)AC] = (1/3)(AB\cdot AC) + (1/6)|AC|^2 = (1/3)\cdot10 + (1/6)\cdot36 = 10/3 + 6 = 28/3$.

3°/ (AJ) étant la médiatrice de [BI], $K = (AJ) \cap (BI)$ est le milieu de [BI]. Alors $AK = (1/2)AB + (1/4)AC$, d'où $AK^2 = (1/4)|AB|^2 + (1/16)|AC|^2 + (1/2)(AB\cdot AC) = 9/4 + 36/16 + 5 = 9/4 + 9/4 + 5 = 7$. Donc $AK = \sqrt{7}$.

4°/ a- Pour $M = A$: $MA^2 + MC^2 = 0 + AC^2 = 36$. Donc $A \in C$.

b- $MA^2 + MC^2 = 2\cdot MI^2 + (AC^2)/2 = 2\cdot MI^2 + 18$ (I milieu de [AC]). $MA^2 + MC^2 = 36 \Leftrightarrow 2\cdot MI^2 = 18 \Leftrightarrow MI^2 = 9 \Leftrightarrow MI = 3$. C est le cercle de centre I et de rayon 3.

منصة التعليم الجزائري