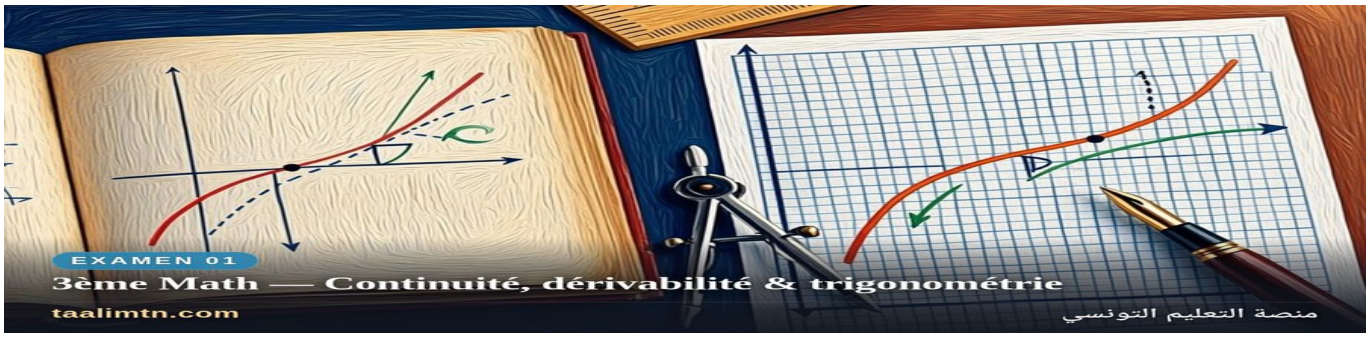

Épreuve : Mathématiques	Devoir de synthèse n° 1	Durée : 2 heures
Lycée : Lycée de l'Éducation	Niveau : 3ème année secondaire	Section : Mathématiques
Date : Samedi 13 décembre 2025	Coefficient : 4	Prof : Équipe pédagogique TA'LIM TN

Nom : _____	Prénom : _____	Classe : 3ème Math ___

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation. Une réponse sans justification n'a aucune valeur.

EXERCICES (20 points)

Exercice n° 1 — Continuité, dérivabilité et asymptote (4 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x + 1 + 2/(x-1)$ si $x < 0$

$f(x) = \sqrt{(3x)} - 1$ si $x \geq 0$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j).

1°/ a- Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b- Montrer que f est continue en 0.

2°/ a- Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

b- Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

3°/ Donner une approximation affine de $f(-0{,}01)$.

Exercice n° 2 — Étude de fonction, asymptote et tangentes (5 pts)

Soit g la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $g(x) = (x^2 + 2)/(x + 1)$, et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1°/ a- Montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$: $g'(x) = (x^2 + 2x - 2)/(x + 1)^2$.

b- Dresser le tableau de variations de g sur $]-1, +\infty[$.

2°/ a- Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C_g) au voisinage de $+\infty$.

b- Déterminer la valeur minimale de g sur $]-1, +\infty[$.

3°/ Soit T_m la tangente à (C_g) au point M d'abscisse m ($m > -1$).

a- Écrire, en fonction de m, une équation de T_m.

b- Déterminer les valeurs de m pour lesquelles T_m passe par l'origine O du repère.

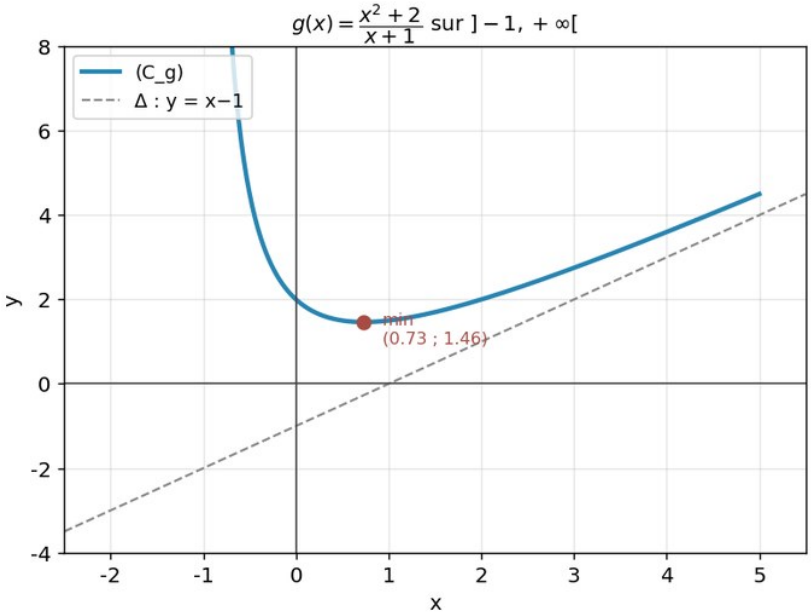

Figure 1 — Courbe (C_g) de g, asymptote oblique Δ : y = x−1 et minimum.

Exercice n° 3 — Trigonométrie : équations et valeurs exactes (5 pts)

Soit f la fonction définie sur ℝ par : f(x) = √3·cos(2x) + sin(2x).

1°/ a- Montrer que, pour tout x ∈ ℝ : f(x) = 2·sin(2x + π/3).

b- Calculer f(π/12) et f(π/6).

2°/ a- Résoudre dans ℝ l'équation f(x) = √3.

b- En déduire les solutions appartenant à l'intervalle]−π, π].

3°/ a- Montrer que cos(π/12) = (√6 + √2)/4.

b- En déduire sin(π/12) puis tan(π/12).

Exercice n° 4 — Angles orientés, ensemble de points et cocyclicité (6 pts)

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle tel que :

(AB, AC) ≡ π/3 [2π] et (BA, BC) ≡ π/6 [2π].

On désigne par (C) le cercle circonscrit à ABC.

1°/ a- Déterminer la mesure principale de l'angle orienté (CA, CB).

b- En déduire la nature du triangle ABC.

2°/ a- Préciser le centre et le rayon du cercle circonscrit (C) (en fonction de AB).

b- Construire (C).

3°/ Soit Γ = {M ∈ P / (MA, MB) ≡ π/2 [2π]}.

a- Montrer que C ∈ Γ.

b- Montrer que Γ = (C). Construire Γ.

4°/ Soit D le point diamétralement opposé à C sur (C).

a- Montrer que (DA, DB) ≡ π/2 [2π].

b- En déduire que D ∈ Γ.

c- Quelle est la nature du quadrilatère ACBD ?

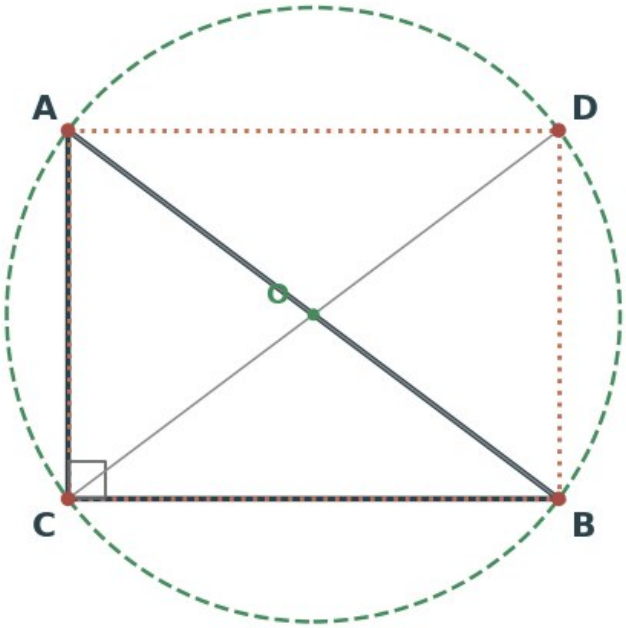

Figure 1 — Triangle ABC rectangle en C, cercle circonscrit (C) de diamètre [AB] et point D.

منصة التعليم الذكي

CORRIGÉ — Examen 01

Exercice 1 — Exercice n° 1 — Continuité, dérivabilité et asymptote

1°/ a- Pour $x < 0$: $x - 1 \neq 0$ (car $x < 0 < 1$), donc $x + 1 + 2/(x-1)$ est défini. Pour $x \geq 0$: $3x \geq 0$, donc $\sqrt{(3x)}$ est définie. Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b- En 0 : $\lim(x\to 0,\ x<0)\ f(x) = \lim [x + 1 + 2/(x-1)] = 0 + 1 + 2/(-1) = 1 - 2 = -1$; et $f(0) = \sqrt{0} - 1 = -1$. Donc $\lim f = f(0)$: f est continue en 0.

2°/ a- Pour $x < 0$: $f(x) - (x + 1) = 2/(x-1)$. Comme $\lim(x\to-\infty)\ 2/(x-1) = 0$, la droite $\Delta : y = x + 1$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

b- Dérivabilité à gauche en 0 : f est rationnelle (donc dérivable) sur $]-\infty, 0[$, et $f'(x) = 1 - 2/(x-1)^2$, donc $\lim(x\to 0^-)\ f'(x) = 1 - 2/1 = -1$: f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$. Dérivabilité à droite : $\lim(x\to 0^+)\ [f(x) - f(0)]/x = \lim [\sqrt{(3x)}]/x = \lim \sqrt{3}/\sqrt{x} = +\infty$. Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 ; (C_f) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut, et une demi-tangente à gauche de pente -1.

3°/ $f(-0{,}01) = f(0 + (-0{,}01)) \approx f(0) + (-0{,}01)\cdot f'_g(0) = -1 + (-0{,}01)\cdot(-1) = -1 + 0{,}01 = -0{,}99$.

Exercice 2 — Exercice n° 2 — Étude de fonction, asymptote et tangentes

1°/ a- $g'(x) = [(2x)(x+1) - (x^2+2)]/(x+1)^2 = (2x^2+2x - x^2 - 2)/(x+1)^2 = (x^2+2x-2)/(x+1)^2$.

b- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$. Sur $]-1,+\infty[$, seul $x = -1+\sqrt{3}$ convient. Signe de g' : $g' < 0$ sur $]-1, -1+\sqrt{3}[$ et $g' > 0$ sur $]-1+\sqrt{3}, +\infty[$. Donc g est strictement décroissante puis strictement croissante, admettant un minimum en $x = -1+\sqrt{3}$.

2°/ a- $g(x) - (x-1) = (x^2+2)/(x+1) - (x-1) = [x^2+2 - (x-1)(x+1)]/(x+1) = (x^2+2 - x^2+1)/(x+1) = 3/(x+1)$. Comme $\lim(x\to+\infty)\ 3/(x+1) = 0$, $\Delta : y = x-1$ est asymptote oblique à (C_g) en $+\infty$.

b- $g(-1+\sqrt{3}) = ((-1+\sqrt{3})^2+2)/((-1+\sqrt{3})+1) = (6-2\sqrt{3})/\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 2$. Le minimum de g sur $]-1,+\infty[$ vaut $2\sqrt{3} - 2$, atteint en $x = -1+\sqrt{3}$.

3°/ a- $T_m : y = g'(m)(x - m) + g(m) = [(m^2+2m-2)/(m+1)^2]\cdot(x - m) + (m^2+2)/(m+1)$.

b- T_m passe par $O \Leftrightarrow 0 = g'(m)(0-m) + g(m) \Leftrightarrow g(m) = m\cdot g'(m) \Leftrightarrow (m^2+2)(m+1) = m(m^2+2m-2) \Leftrightarrow m^3+m^2+2m+2 = m^3+2m^2-2m \Leftrightarrow m^2 - 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{6}$. Les deux valeurs $m = 2-\sqrt{6}$ et $m = 2+\sqrt{6}$ appartiennent à $]-1,+\infty[$: il existe deux tangentes à (C_g) passant par O.

Exercice 3 — Exercice n° 3 — Trigonométrie : équations et valeurs exactes

1°/ a- $2\cdot\sin(2x + \pi/3) = 2[\sin(2x)\cos(\pi/3) + \cos(2x)\sin(\pi/3)] = 2[\sin(2x)\cdot(1/2) + \cos(2x)\cdot(\sqrt{3}/2)] = \sin(2x) + \sqrt{3}\cdot\cos(2x) = f(x)$. Donc $f(x) = 2\cdot\sin(2x + \pi/3)$.

b- $f(\pi/12) = 2\cdot\sin(\pi/6 + \pi/3) = 2\cdot\sin(\pi/2) = 2$; $f(\pi/6) = 2\cdot\sin(\pi/3 + \pi/3) = 2\cdot\sin(2\pi/3) = 2\cdot(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}$.

2°/ a- $f(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\cdot\sin(2x + \pi/3) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(2x + \pi/3) = \sqrt{3}/2 = \sin(\pi/3) \Leftrightarrow 2x + \pi/3 = \pi/3 + 2k\pi$ ou $2x + \pi/3 = 2\pi/3 + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\Leftrightarrow x = k\pi$ ou $x = \pi/6 + k\pi$. Donc $S_{\mathbb{R}} = \{k\pi\ ;\ \pi/6 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

b- Dans $]-\pi, \pi]$: $x = k\pi$ donne 0 et π ($-\pi$ est exclu) ; $x = \pi/6 + k\pi$ donne $\pi/6$ et $-5\pi/6$. Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \{-5\pi/6\ ;\ 0\ ;\ \pi/6\ ;\ \pi\}$.

3°/ a- $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$, donc $\cos(\pi/12) = \cos(\pi/3 - \pi/4) = \cos(\pi/3)\cos(\pi/4) + \sin(\pi/3)\sin(\pi/4) = (1/2)(\sqrt{2}/2) + (\sqrt{3}/2)(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/4 + \sqrt{6}/4 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$.

b- $\sin(\pi/12) = \sin(\pi/3 - \pi/4) = \sin(\pi/3)\cos(\pi/4) - \cos(\pi/3)\sin(\pi/4) = (\sqrt{3}/2)(\sqrt{2}/2) - (1/2)(\sqrt{2}/2) = \sqrt{6}/4 - \sqrt{2}/4 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$. Et $\tan(\pi/12) = \sin/\cos = (\sqrt{6}-\sqrt{2})/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; en multipliant par $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/(\sqrt{6}-\sqrt{2})$: $\tan(\pi/12) = (6 - 2\sqrt{12} + 2)/(6 - 2) = (8 - 4\sqrt{3})/4 = 2 - \sqrt{3}$.

Exercice 4 — Exercice n° 4 — Angles orientés, ensemble de points et cocyclicité

1°/ a- La somme des mesures des angles orientés d'un triangle : $(AB,AC) + (CA,CB) + (BC,BA) \equiv \pi\ [2\pi]$. Donc $(CA, CB) \equiv \pi - (AB,AC) - (BC,BA) = \pi - \pi/3 - (-\pi/6)$ ... plus directement, les angles géométriques aux sommets s'additionnent : $\text{angle}(C) = \pi - \text{angle}(A) - \text{angle}(B) = \pi - \pi/3 - \pi/6 = \pi/2$. Ainsi $(CA, CB) \equiv \pi/2\ [2\pi]$ (mesure principale).

b- Comme $(CA, CB) = \pi/2$, le triangle ABC est rectangle en C.

2°/ a- ABC étant rectangle en C, l'hypoténuse est [AB]. Le cercle circonscrit (C) a pour diamètre [AB] : son centre est le milieu de [AB] et son rayon vaut AB/2.

b- Construire le milieu de [AB] puis le cercle de centre ce milieu et de rayon AB/2.

3°/ a- $C \in \Gamma$ car $(CA, CB) \equiv \pi/2\ [2\pi]$ (question 1°), ce qui est exactement la condition définissant Γ.

b- Γ est le lieu des points M tels que $(MA, MB) \equiv \pi/2$, c'est-à-dire des points d'où l'on voit le segment [AB] sous un angle droit : d'après le théorème de l'angle inscrit (réciproque), Γ est le cercle de diamètre [AB] (privé de A et B). C'est donc exactement (C). D'où $\Gamma = (C)$.

منصة التعليم الذكي

4°/ a- D est sur (C), cercle de diamètre [AB] ; d'après le théorème de l'angle inscrit, (DA, DB) ≡ π/2 [2π] (D voit [AB] sous un angle droit).

b- Comme (DA, DB) ≡ π/2, on a D ∈ Γ (par définition de Γ).

c- Les quatre points A, C, B, D appartiennent à (C) ; de plus (CA, CB) = π/2 et (DA, DB) = π/2, donc le quadrilatère ACBD a deux angles opposés droits et est inscriptible : c'est un rectangle (dont les diagonales [AB] et [CD] sont deux diamètres de (C)).

منصة التعليم الذكي