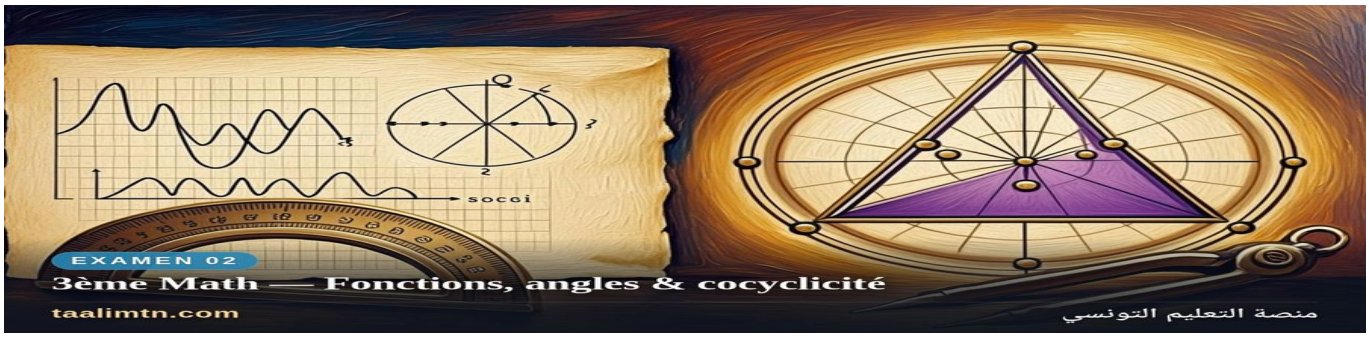

Épreuve : Mathématiques	Devoir de synthèse n° 1	Durée : 2 heures
Lycée : Lycée de l'Éducation	Niveau : 3ème année secondaire	Section : Mathématiques
Date : Samedi 13 décembre 2025	Coefficient : 4	Prof : Équipe pédagogique TA'LIM TN

Nom : _____	Prénom : _____	Classe : 3ème Math ___

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation. Une réponse sans justification n'a aucune valeur.

EXERCICES (20 points)

Exercice n° 1 — Lecture graphique et étude d'une fonction rationnelle (5 pts)

La courbe (C) ci-dessus représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Elle admet la droite Δ d'équation $x = 2$ comme asymptote verticale et la droite Δ' d'équation $y = x$ comme asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$. La tangente (T) à (C) au point B(3, 7) passe par le point de coordonnées (4, 4).

1°/ Par lecture graphique :

a- Déterminer Df et les limites de f aux bornes de Df.

b- Déterminer $\lim(x\to\pm\infty)\ [f(x) - x]$.

c- Déterminer f'(0), f'(4) et f'(3) (lecture de la pente de la tangente en B).

2°/ a- Montrer que, pour tout $x \in Df$: $f(x) - x = 4/(x - 2)$.

b- Montrer que $f'(x) = x(x - 4)/(x - 2)^2$ puis dresser le tableau de variation de f.

3°/ a- Donner une approximation affine de f(3,01).

b- En déduire un encadrement de f(3,01).

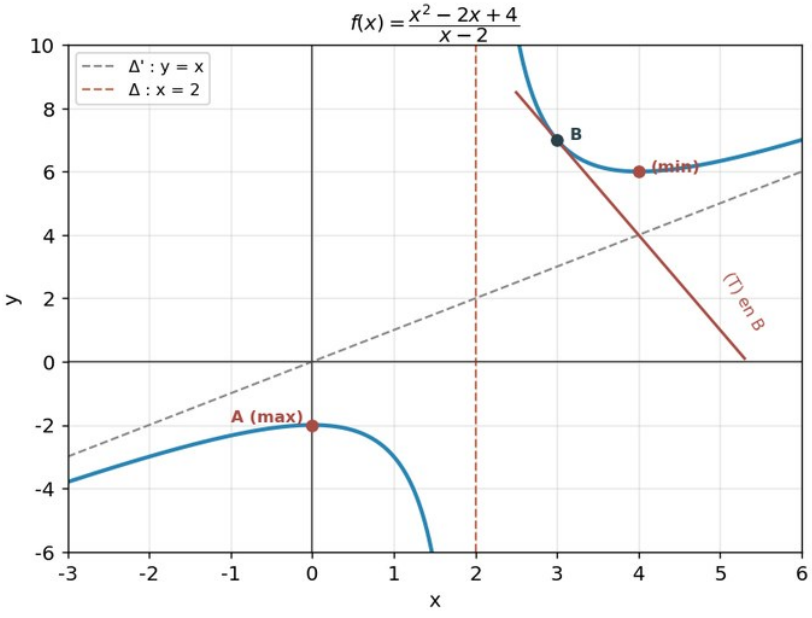

Figure 1 — Courbe (C) de f, asymptotes x = 2 et y = x, extrema et tangente en B(3,7).

Exercice n° 2 — Continuité et dérivabilité avec paramètre (4 pts)

Soit f la fonction définie par :
$f(x) = (x^2 - 3x + m)/(x - 1)$ si $x < 1$
$f(x) = 2x - 3$ si $x \geq 1$
où m est un réel.
1°/ a- Préciser le domaine de définition de f.
b- Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en 1.
2°/ a- Pour la valeur de m trouvée, étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1.
b- Interpréter graphiquement.
3°/ a- f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
b- Donner une approximation affine de f(0,99).

Exercice n° 3 — Trigonométrie : transformation et valeurs exactes (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(2x) + \cos(2x)$.
1°/ a- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sqrt{2}\cdot\sin(2x + \pi/4)$.
b- Calculer $f(\pi/8)$ et $f(3\pi/8)$.
2°/ a- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.
b- En déduire les solutions appartenant à $]-\pi, \pi]$.
3°/ a- Montrer que $\cos(5\pi/12) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$.
b- En déduire $\sin(5\pi/12)$ puis $\tan(5\pi/12)$.

Exercice n° 4 — Géométrie repérée, produit scalaire et cocyclicité (6 pts)

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, i, j). On donne les points $A(3, \sqrt{3})$, $B(3, -\sqrt{3})$ et $C(4, 0)$.
1°/ a- Calculer $CA\cdot CB$ et $\det(CA, CB)$.
b- En déduire $\cos(CA, CB)$ et $\sin(CA, CB)$, puis la mesure principale de (CA, CB).
2°/ a- Déterminer les coordonnées polaires de A et de B.
b- Construire les points A et B.
3°/ a- Donner la mesure principale de l'angle orienté (OA, OB).
b- En déduire la nature du triangle OAB.
4°/ a- Montrer que les points O, A, B et C sont situés sur un même cercle (C).
b- On pose I le centre de (C). Montrer que I est le milieu de [OC].
c- En déduire la construction de (C) et du point C.
Données : A(3, √3) ; B(3, −√3) ; C(4, 0) ; repère (O, i, j) orthonormé direct.

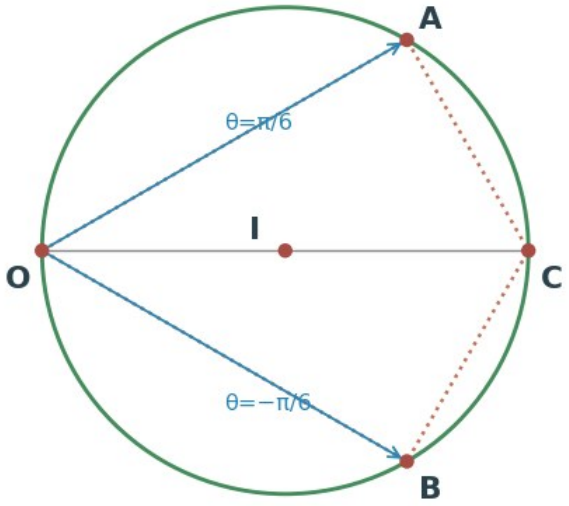

Figure 1 — Points A, B, C et cercle (C) de centre I = milieu de [OC], passant par O, A, B, C.

CORRIGÉ — Examen 02

Exercice 1 — Exercice n° 1 — Lecture graphique et étude d'une fonction rationnelle

1°/ a- Df = $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. Limites : $\lim(x\to2^-) f(x) = -\infty$ et $\lim(x\to2^+) f(x) = +\infty$ (asymptote verticale x = 2) ; $\lim(x\to\pm\infty) f(x) = \pm\infty$ (branche parabolique de direction asymptote y = x).

b- $\lim(x\to\pm\infty) [f(x) - x] = 0$ (la courbe se rapproche de l'asymptote oblique y = x).

c- Aux extremums : f'(0) = 0 et f'(4) = 0 (tangentes horizontales). En B(3,7), la tangente passe par (4,4) donc sa pente vaut (4−7)/(4−3) = −3 : f'(3) = −3.

2°/ a- $f(x) - x = (x^2-2x+4)/(x-2) - x = [x^2-2x+4 - x(x-2)]/(x-2) = (x^2-2x+4 - x^2+2x)/(x-2) = 4/(x-2)$.

b- $f'(x) = [(2x-2)(x-2) - (x^2-2x+4)]/(x-2)^2 = (2x^2-6x+4 - x^2+2x-4)/(x-2)^2 = (x^2-4x)/(x-2)^2 = x(x-4)/(x-2)^2$. f'(x) = 0 ⇔ x = 0 ou x = 4. Signe : f' > 0 sur $]-\infty,0[$ et $]4,+\infty[$, f' < 0 sur $]0,2[$ et $]2,4[$. D'où : f croissante sur $]-\infty,0]$, décroissante sur $]0,2[$ et $]2,4[$, croissante sur $[4,+\infty[$. Maximum local f(0) = −2 ; minimum local f(4) = 6.

3°/ a- $f(3,01) = f(3 + 0,01) \approx f(3) + 0,01\cdot f'(3) = 7 + 0,01\cdot(-3) = 7 - 0,03 = 6,97$.

b- Comme f est décroissante au voisinage de 3 (f'(3) < 0) et 3,01 > 3, on a f(3,01) < f(3) = 7, et l'approximation donne f(3,01) ≈ 6,97. Encadrement : 6,96 < f(3,01) < 6,98.

Exercice 2 — Exercice n° 2 — Continuité et dérivabilité avec paramètre

1°/ a- Pour x < 1 : x − 1 ≠ 0, donc $(x^2-3x+m)/(x-1)$ est défini. Pour x ≥ 1 : 2x−3 est défini. Donc Df = $\mathbb{R}$.

b- Continuité en 1 : f(1) = 2·1 − 3 = −1. $\lim(x\to1^-) f(x) = (1-3+m)/0^-$; pour que cette limite soit finie (et égale à −1), il faut que le numérateur s'annule en 1 : 1 − 3 + m = 0 ⇔ m = 2. Avec m = 2 : $(x^2-3x+2)/(x-1) = (x-1)(x-2)/(x-1) = x - 2$ pour x ≠ 1, donc $\lim(x\to1^-) f(x) = 1 - 2 = -1 = f(1)$. f est continue en 1 pour m = 2.

2°/ a- Avec m = 2, sur x < 1 : f(x) = x − 2 (donc f'_g(1) = 1). Sur x ≥ 1 : f(x) = 2x − 3 (donc f'_d(1) = 2). Les deux nombres dérivés existent mais sont distincts (1 ≠ 2).

b- f n'est pas dérivable en 1 ; (C_f) admet au point d'abscisse 1 deux demi-tangentes : à gauche de pente 1, à droite de pente 2 (point anguleux).

3°/ a- f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (comme somme/produit de fonctions dérivables) mais pas en 1. Donc f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

b- $f(0,99) = f(1 + (-0,01)) \approx f(1) + (-0,01)\cdot f'_g(1) = -1 + (-0,01)\cdot 1 = -1 - 0,01 = -1,01$.

Exercice 3 — Exercice n° 3 — Trigonométrie : transformation et valeurs exactes

1°/ a- $\sqrt{2}\cdot\sin(2x + \pi/4) = \sqrt{2}[\sin(2x)\cos(\pi/4) + \cos(2x)\sin(\pi/4)] = \sqrt{2}[\sin(2x)\cdot(\sqrt{2}/2) + \cos(2x)\cdot(\sqrt{2}/2)] = \sin(2x) + \cos(2x) = f(x)$. Donc $f(x) = \sqrt{2}\cdot\sin(2x + \pi/4)$.

b- $f(\pi/8) = \sqrt{2}\cdot\sin(\pi/4 + \pi/4) = \sqrt{2}\cdot\sin(\pi/2) = \sqrt{2}$; $f(3\pi/8) = \sqrt{2}\cdot\sin(3\pi/4 + \pi/4) = \sqrt{2}\cdot\sin(\pi) = 0$.

2°/ a- $f(x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot\sin(2x + \pi/4) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(2x + \pi/4) = 1 = \sin(\pi/2) \Leftrightarrow 2x + \pi/4 = \pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ⇔ $x = \pi/8 + k\pi$. Donc $S_{\mathbb{R}} = \{\pi/8 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

b- Dans $]-\pi, \pi]$: π/8 (k=0) et $\pi/8 - \pi = -7\pi/8$ (k=−1). Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \{-7\pi/8 ; \pi/8\}$.

3°/ a- $5\pi/12 = \pi/4 + \pi/6$, donc $\cos(5\pi/12) = \cos(\pi/4 + \pi/6) = \cos(\pi/4)\cos(\pi/6) - \sin(\pi/4)\sin(\pi/6) = (\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) - (\sqrt{2}/2)(1/2) = \sqrt{6}/4 - \sqrt{2}/4 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$.

b- $\sin(5\pi/12) = \sin(\pi/4 + \pi/6) = \sin(\pi/4)\cos(\pi/6) + \cos(\pi/4)\sin(\pi/6) = (\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2)(1/2) = \sqrt{6}/4 + \sqrt{2}/4 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$. Et $\tan(5\pi/12) = \sin/\cos = (\sqrt{6}+\sqrt{2})/(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; en multipliant par $(\sqrt{6}+\sqrt{2})/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$: $\tan(5\pi/12) = (6 + 2\sqrt{12} + 2)/(6 - 2) = (8 + 4\sqrt{3})/4 = 2 + \sqrt{3}$.

Exercice 4 — Exercice n° 4 — Géométrie repérée, produit scalaire et cocyclicité

1°/ a- CA = A − C = (−1, √3), CB = B − C = (−1, −√3). CA·CB = (−1)(−1) + (√3)(−√3) = 1 − 3 = −2. det(CA, CB) = (−1)(−√3) − (√3)(−1) = √3 + √3 = 2√3.

b- |CA| = √(1+3) = 2, |CB| = 2. cos(CA, CB) = (CA·CB)/(|CA||CB|) = −2/4 = −1/2 ; sin(CA, CB) = det(CA,CB)/(|CA||CB|) = 2√3/4 = √3/2 > 0. Donc (CA, CB) ≡ 2π/3 [2π] (mesure principale, car cos = −1/2 et sin > 0).

2°/ a- |OA| = √(9+3) = 2√3, θ_A = atan2(√3, 3) = π/6 : A a pour coordonnées polaires (2√3, π/6). De même |OB| = 2√3, θ_B = atan2(−√3, 3) = −π/6 : B a pour coordonnées polaires (2√3, −π/6).

b- Placer A sur la demi-droite d'angle π/6 à la distance 2√3 de O ; B sur la demi-droite d'angle −π/6 à la distance 2√3 de O.

3°/ a- OA·OB = (3)(3) + (√3)(−√3) = 9 − 3 = 6 ; cos(OA, OB) = 6/(2√3·2√3) = 6/12 = 1/2. det(OA, OB) = (3)(−√3) − (√3)(3) = −6√3 < 0, donc sin(OA, OB) < 0. Ainsi (OA, OB) ≡ −π/3 [2π] (mesure principale).

منصة التعليم الوطني

b- OA = OB = $2\sqrt{3}$ et l'angle (OA, OB) a pour mesure $\pi/3$ en valeur absolue : le triangle OAB est isocèle en O avec un angle au sommet de $\pi/3$, donc il est équilatéral (côté $2\sqrt{3}$).

4°/ a- Considérons le cercle de centre I = (2, 0) et de rayon 2 : $|IO| = 2$, $|IA| = \sqrt{(3-2)^2+3} = 2$, $|IB| = \sqrt{(3-2)^2+3} = 2$, $|IC| = \sqrt{(4-2)^2+0} = 2$. Les quatre points O, A, B, C sont à la distance 2 de I : ils sont donc cocycliques sur le cercle (C) de centre I et de rayon 2.

b- I = (2, 0) = ((0+4)/2, (0+0)/2) : I est le milieu du segment [OC].

c- On construit le milieu I de [OC] (une fois O placé et C connu, ou inversement) puis le cercle de centre I et de rayon 2 ; les points A et B s'obtiennent comme intersections de ce cercle avec les demi-droites d'angles $\pi/6$ et $-\pi/6$.

منصة التعليم التوضيحي