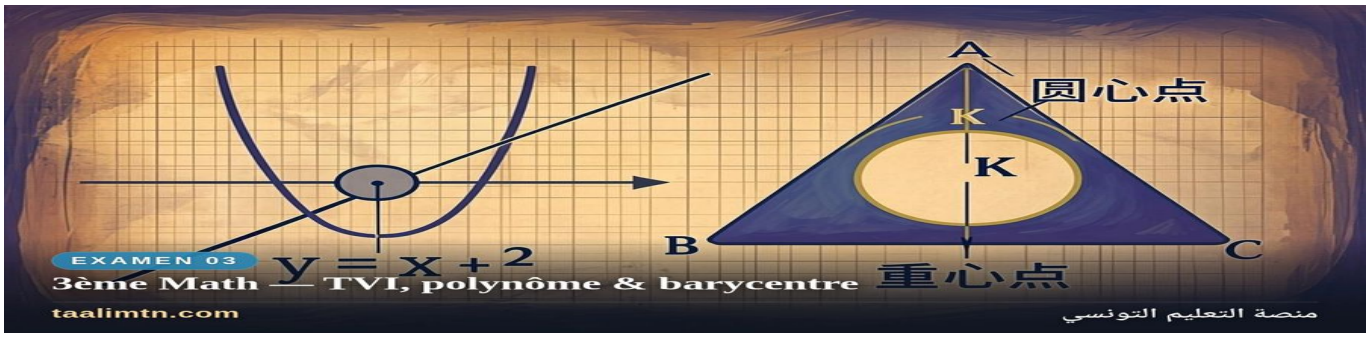


Épreuve : Mathématiques	Devoir de contrôle n° 1	Durée : 2 heures
Lycée : Lycée de l'Éducation	Niveau : 3ème année secondaire	Section : Mathématiques
Date : Samedi 15 novembre 2025	Coefficient : 4	Prof : Équipe pédagogique TA'LIM TN

Nom : _____	Prénom : _____	Classe : 3ème Math ___

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation. Une réponse sans justification n'a aucune valeur.

EXERCICES (20 points)

Exercice n° 1 — Étude de fonction, TVI et racine de polynôme (6 pts)

Soient les fonctions f et g définies sur [0,+∞[par : $f(x) = 2x/(x^2+4)$ et $g(x) = (x-1)/4$. On désigne par (C) et (C') leurs courbes respectives dans un repère orthogonal (O, i, j).

1°/ a- Vérifier que pour tous réels a et b de [0,+∞[: $f(b) - f(a) = 2(b-a)(4-ab)/((a^2+4)(b^2+4))$.

b- En déduire le sens de variation de f sur [0,2] et sur [2,+∞[.

c- Montrer que f admet sur [0,+∞[un maximum que l'on précisera.

2°/ a- Déterminer le sens de variation de g sur [0,+∞[.

b- Déterminer graphiquement le nombre de solutions dans [0,+∞[de l'équation f(x) = g(x).

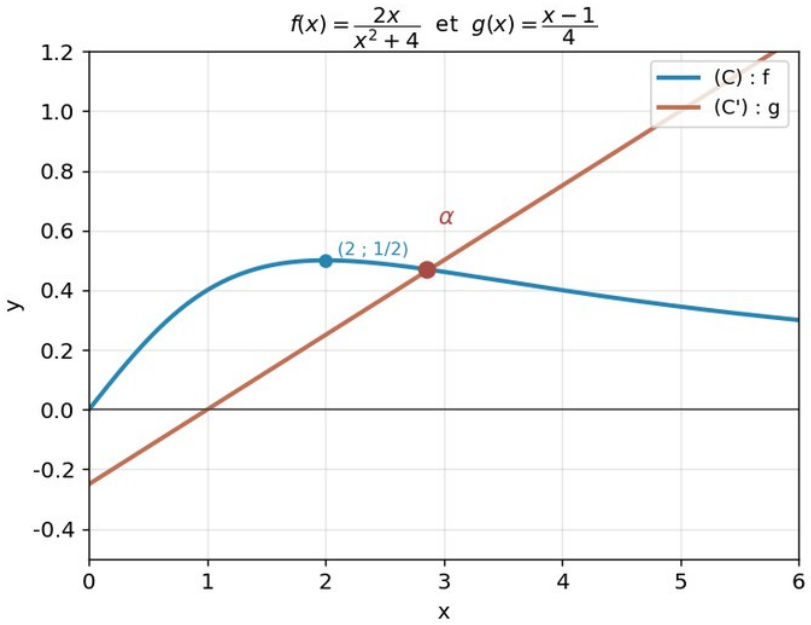
3°/ On définit sur [0,+∞[la fonction h par : h(x) = f(x) − g(x).

a- Justifier que h est continue sur [0,+∞[.

b- Montrer que l'équation f(x) = g(x) admet dans l'intervalle [2,3] une solution unique α.

c- Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

d- Montrer que α est une racine du polynôme P défini par $P(x) = x^3 - x^2 - 4x - 4$.



Courbes (C) de f et (C') de g sur [0,+∞[.

Exercice n° 2 — Continuité et prolongement par continuité (6 pts)

1°/ Soit g la fonction définie par : $g(x) = (\sqrt{(x+3)} - 2)/(x - 1)$.

a- Déterminer le domaine de définition Dg de g.

b- Montrer que, pour tout $x \in Dg$: $g(x) = 1/(\sqrt{(x+3)}+2)$.

c- g est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Si oui, définir ce prolongement.

2°/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (x^2-9)/(x-3)$ si $x < 3$

$f(x) = mx$ si $x \geq 3$

où m est un réel. Déterminer m pour que f soit continue en 3.

Exercice n° 3 — Produit scalaire, barycentre et ensembles (8 pts)

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que AB = AC = 5 et BC = 6. Soit I le milieu de [BC] et J le barycentre des points pondérés (B,2) et (C,1).

1°/ a- Montrer que (AI) est perpendiculaire à (BC) et calculer AI.

b- Calculer $AB \cdot AC$.

c- Montrer que $AJ = (2/3)AB + (1/3)AC$.

2°/ a- Montrer que $AJ^2 = 17$.

b- Montrer que $AJ \cdot AI = 16$.

3°/ Soit l'ensemble $C = \{M \in P \text{ tel que } MB^2 + MC^2 = 36\}$.

a- Vérifier que $B \in C$.

b- Montrer que C est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4°/ Soit K le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,4).

a- Montrer que, pour tout point M du plan : $MA^2 + 4MB^2 = 5MK^2 + 20$.

b- En déduire l'ensemble $(\Gamma) = \{M \in P \text{ tel que } MA^2 + 4MB^2 = 65\}$.

Données : AB = AC = 5 ; BC = 6 ; I milieu de [BC] ; J barycentre de (B,2) et (C,1) ; K barycentre de (A,1) et (B,4).

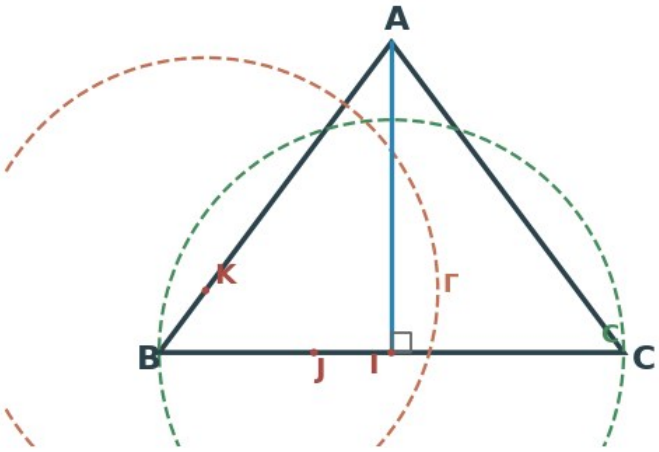


Figure 1 — Triangle ABC isocèle en A, médiane (AI) et barycentre J.

منصة التعليم التونسي

CORRIGÉ — Examen 03

Exercice 1 — Exercice n° 1 — Étude de fonction, TVI et racine de polynôme

1°/ a- $f(b)-f(a) = 2b/(b^2+4) - 2a/(a^2+4) = 2[b(a^2+4) - a(b^2+4)]/((a^2+4)(b^2+4)) = 2[a^2b+4b-ab^2-4a]/((a^2+4)(b^2+4)) = 2(b-a)(4-ab)/((a^2+4)(b^2+4))$ (en factorisant).

b- Le signe de $f(b)-f(a)$ est celui de $(b-a)(4-ab)$. Sur $[0,2]$: $ab \le 4 \Rightarrow 4-ab \ge 0$, donc f est croissante sur $[0,2]$. Sur $[2,+\infty[$: $ab \ge 4 \Rightarrow 4-ab \le 0$, donc f est décroissante sur $[2,+\infty[$.

c- f croissante puis décroissante admet un maximum en $x = 2$: $f(2) = 4/8 = 1/2$.

2°/ a- $g(x) = (x-1)/4$ est affine de coefficient directeur $1/4 > 0$, donc g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

b- (C) part de l'origine, monte jusqu'au sommet $(2 ; 1/2)$ puis redescend vers 0 ; (C') est une droite passant par $(0 ; -1/4)$ et $(1 ; 0)$. Les deux courbes se coupent en un seul point sur $[0,+\infty[$ (au voisinage de $x \approx 2{,}85$) : l'équation $f(x) = g(x)$ admet une seule solution dans $[0,+\infty[$.

3°/ a- f est rationnelle à dénominateur non nul sur $[0,+\infty[$, g est affine : toutes deux sont continues sur $[0,+\infty[$, donc $h = f - g$ est continue sur $[0,+\infty[$.

b- $h(2) = f(2) - g(2) = 1/2 - 1/4 = 1/4 > 0$; $h(3) = f(3) - g(3) = 6/13 - 1/2 = -1/26 < 0$. D'après le TVI, l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[2,3]$. De plus $h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0$ sur $[2,3]$ (f décroissante, g croissante), donc h est strictement décroissante sur $[2,3]$: α est unique.

c- $h(2,8) > 0$ et $h(2,9) < 0$, donc $\alpha \in]2{,}8 ; 2{,}9[$ (encadrement d'amplitude 0,1).

d- $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha/(\alpha^2+4) = (\alpha-1)/4 \Leftrightarrow 8\alpha = (\alpha-1)(\alpha^2+4) = \alpha^3 - \alpha^2 + 4\alpha - 4 \Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0$. Donc α est racine de $P(x) = x^3 - x^2 - 4x - 4$.

Exercice 2 — Exercice n° 2 — Continuité et prolongement par continuité

1°/ a- Dg : il faut $x+3 \ge 0$ (soit $x \ge -3$) et $x-1 \ne 0$ (soit $x \ne 1$). Donc $Dg = [-3,+\infty[\setminus \{1\}$.

b- Pour $x \in Dg$: $g(x) = (\sqrt{(x+3)}-2)/(x-1) \times (\sqrt{(x+3)}+2)/(\sqrt{(x+3)}+2) = (x+3-4)/((x-1)(\sqrt{(x+3)}+2)) = (x-1)/((x-1)(\sqrt{(x+3)}+2)) = 1/(\sqrt{(x+3)}+2)$.

c- $\lim(x\to1)\, g(x) = 1/(\sqrt{4}+2) = 1/4$. g est prolongeable par continuité en 1 en posant $\tilde{g}(1) = 1/4$.

2°/ En 3 : $\lim(x\to3,\, x<3)\, f(x) = \lim\, (x^2-9)/(x-3) = \lim\, (x+3) = 6$. Et $f(3) = 3m$. f continue en $3 \Leftrightarrow 3m = 6 \Leftrightarrow m = 2$.

Exercice 3 — Exercice n° 3 — Produit scalaire, barycentre et ensembles

1°/ a- ABC est isocèle en A ($AB = AC$), donc la médiane (AI) est aussi hauteur : $(AI) \perp (BC)$. $AI = \sqrt{(AB^2 - (BC/2)^2)} = \sqrt{(25 - 9)} = \sqrt{16} = 4$.

b- $AB\cdot AC = (AB^2 + AC^2 - BC^2)/2 = (25 + 25 - 36)/2 = 14/2 = 7$.

c- $J = \text{bary}\{(B,2),(C,1)\} \Rightarrow 3\cdot AJ = 2\cdot AB + AC \Rightarrow AJ = (2/3)AB + (1/3)AC$.

2°/ a- $AJ^2 = |(2/3)AB + (1/3)AC|^2 = (4/9)AB^2 + (1/9)AC^2 + (4/9)(AB\cdot AC) = (4/9)\cdot25 + (1/9)\cdot25 + (4/9)\cdot7 = 100/9 + 25/9 + 28/9 = 153/9 = 17$.

b- I milieu de $[BC] \Rightarrow AI = (1/2)(AB + AC)$. $AJ\cdot AI = [(2/3)AB + (1/3)AC]\cdot[(1/2)(AB+AC)] = (1/2)[(2/3)AB^2 + (2/3)(AB\cdot AC) + (1/3)(AB\cdot AC) + (1/3)AC^2] = (1/2)[50/3 + 14/3 + 7/3 + 25/3] = (1/2)(96/3) = 16$.

3°/ a- Pour $M = B$: $MB^2 + MC^2 = 0 + BC^2 = 36$. Donc $B \in C$.

b- $MB^2 + MC^2 = 2\cdot MI^2 + (BC^2)/2 = 2\cdot MI^2 + 18$ (I milieu de [BC]). $MB^2 + MC^2 = 36 \Leftrightarrow 2\cdot MI^2 = 18 \Leftrightarrow MI = 3$. C est le cercle de centre I et de rayon 3.

4°/ a- $K = \text{bary}\{(A,1),(B,4)\} \Rightarrow AK = (4/5)AB$ (donc $AK = 4$). D'après la formule de réduction : $MA^2 + 4MB^2 = 5\cdot MK^2 + KA^2 + 4\cdot KB^2$. $KA = 4$ et $KB = 1$, donc $KA^2 + 4\cdot KB^2 = 16 + 4 = 20$. Ainsi $MA^2 + 4MB^2 = 5\cdot MK^2 + 20$.

b- $MA^2 + 4MB^2 = 65 \Leftrightarrow 5\cdot MK^2 + 20 = 65 \Leftrightarrow MK^2 = 9 \Leftrightarrow MK = 3$. ($\Gamma$) est le cercle de centre K et de rayon 3.