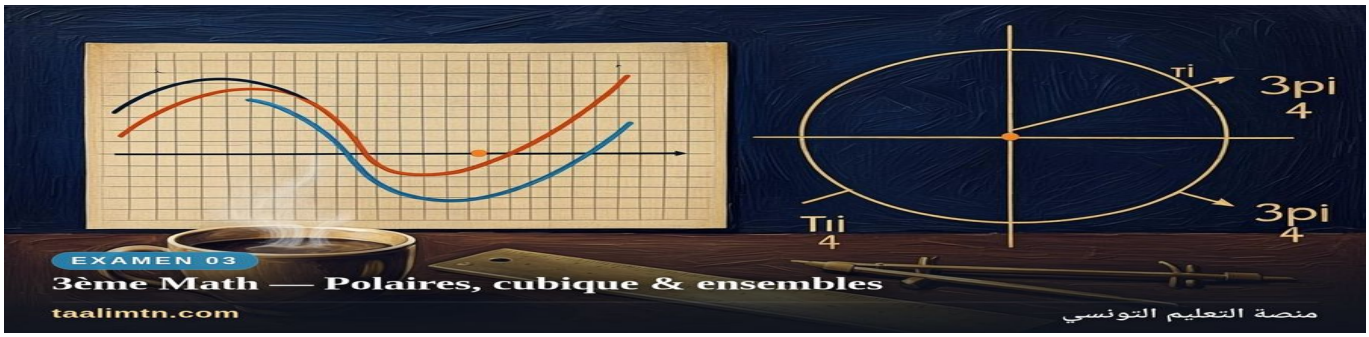

Épreuve : Mathématiques	Devoir de synthèse n° 1	Durée : 2 heures
Lycée : Lycée de l'Éducation	Niveau : 3ème année secondaire	Section : Mathématiques
Date : Samedi 13 décembre 2025	Coefficient : 4	Prof : Équipe pédagogique TA'LIM TN

Nom : _____	Prénom : _____	Classe : 3ème Math ___

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation. Une réponse sans justification n'a aucune valeur.

EXERCICES (20 points)

Exercice n° 1 — Coordonnées polaires et trigonométrie (5 pts)

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct (O, i, j).

1°/ Représenter l'ensemble Δ des points M de coordonnées polaires (r ; π/4) avec r > 0.

2°/ a- Construire le point A de Δ tel que OA = 2√2.

b- Déterminer les coordonnées polaires, puis cartésiennes, du point A.

3°/ Soit B le point tel que OAB est un triangle direct, isocèle et rectangle en O. On note I le milieu de [AB].

a- Donner les coordonnées polaires de B et de I.

b- En déduire leurs coordonnées cartésiennes.

4°/ a- Montrer que cos(π/12) = (√6 + √2)/4. En déduire sin(π/12).

b- Résoudre dans ℝ l'équation : sin(2x) = (√6 − √2)/4.

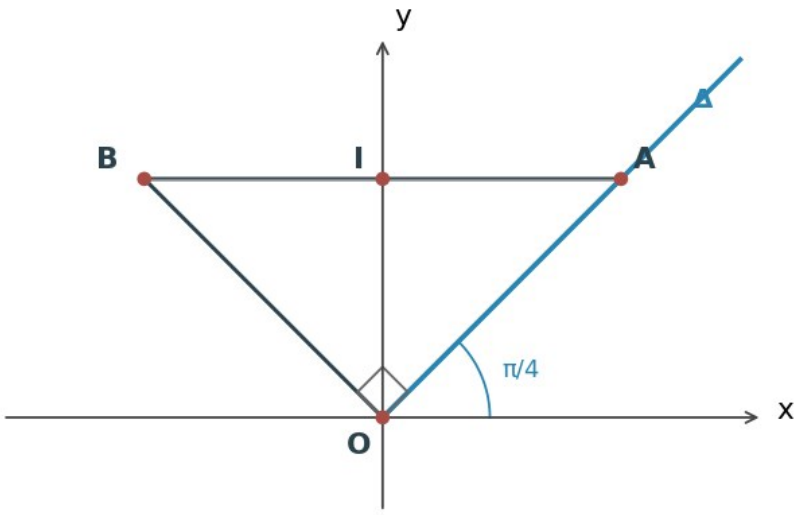

Figure 1 — Demi-droite Δ, points A, B et I dans le repère (O, i, j).

Exercice n° 2 — Étude d'une fonction polynomiale et tangentes (5 pts)

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = x^3 - 3x^2$, et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j).

1°/ a- Calculer f'(x) et montrer que f'(x) = 3x(x − 2).

b- Dresser le tableau de variations de f sur ℝ.

2°/ a- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A(0, 0).
b- Montrer que (T) recoupe (C) en un point B dont on déterminera les coordonnées.
3°/ a- Soit M un point de (C) d'abscisse m. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la tangente à (C) en M est horizontale.
b- Préciser alors les coordonnées des points correspondants.

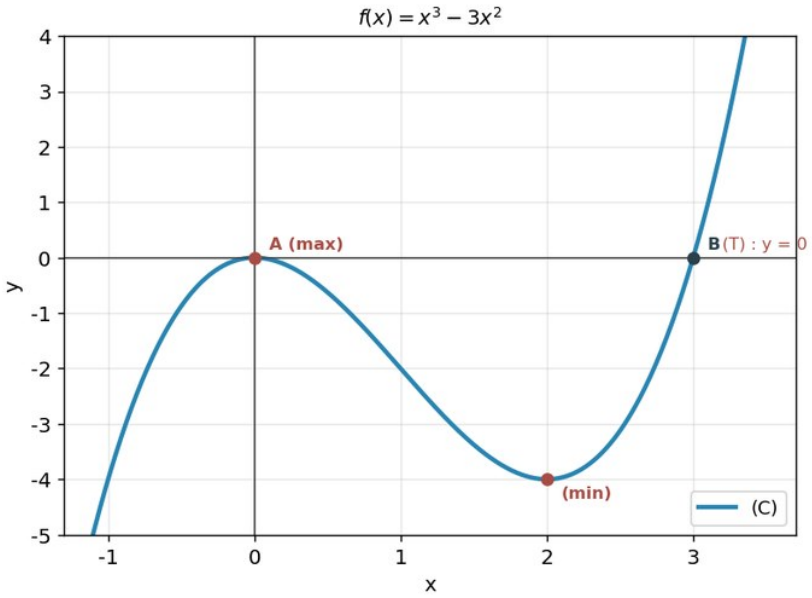

Figure 1 — Courbe (C) de f, extremums, tangente (T) : y = 0 au point A et point B(3,0).

Exercice n° 3 — Continuité, dérivabilité et asymptote (4 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (x^2 + 2x + 3)/(x + 1)$ si $x < 0$
$f(x) = \sqrt{(x^2 + 9)}$ si $x \geq 0$
et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
1°/ a- Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
b- Montrer que f est continue en 0.
2°/ a- Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.
b- Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 0. Interpréter graphiquement.
3°/ Donner une approximation affine de $f(-0{,}01)$.

Exercice n° 4 — Angles orientés et ensemble de points (6 pts)

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle tel que :
$(AB, AC) \equiv 2\pi/3\ [2\pi]$ et $(BA, BC) \equiv \pi/4\ [2\pi]$.
On désigne par (C) le cercle circonscrit à ABC.
1°/ a- Déterminer la mesure principale de l'angle orienté (CA, CB).
b- Déterminer la mesure principale de l'angle orienté (AB, BC).
2°/ a- Soit $\Gamma = \{M \in P / (MA, MB) \equiv \pi/12\ [2\pi]\}$. Montrer que $C \in \Gamma$.
b- Déterminer et construire Γ.
3°/ Soit M un point de Γ distinct de A et B.
a- Montrer que $(MA, MB) \equiv (CA, CB)\ [2\pi]$.
b- En déduire que M appartient au cercle circonscrit (C) à ABC.
4°/ a- Soit D le point diamétralement opposé à C sur (C). Montrer que $D \in \Gamma$.
b- Construire Γ et (C).

CORRIGÉ — Examen 03

Exercice 1 — Exercice n° 1 — Coordonnées polaires et trigonométrie

1°/ Δ est la demi-droite issue de O formant l'angle $\pi/4$ avec (O, i) (dans le sens direct).

2°/ a- A est sur Δ à la distance $2\sqrt{2}$ de O : on le place sur la demi-droite Δ.

b- Coordonnées polaires de A : $(2\sqrt{2}, \pi/4)$. Coordonnées cartésiennes : $x_A = 2\sqrt{2}\cdot\cos(\pi/4) = 2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}/2) = 2$; $y_A = 2\sqrt{2}\cdot\sin(\pi/4) = 2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}/2) = 2$. Donc A(2, 2).

3°/ a- OAB direct, isocèle et rectangle en O signifie $(OA, OB) \equiv \pi/2\ [2\pi]$ et $OA = OB = 2\sqrt{2}$. B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$: B a pour coordonnées polaires $(2\sqrt{2}, \pi/4 + \pi/2) = (2\sqrt{2}, 3\pi/4)$. I est le milieu de [AB] : $|OI| = 2$ (demi-diagonale du carré OAB... du losange rectangle OAB, qui est en fait un carré) et $(O, i, OI) \equiv \pi/2$, donc I a pour coordonnées polaires $(2, \pi/2)$.

b- B : $x_B = 2\sqrt{2}\cdot\cos(3\pi/4) = 2\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2}/2) = -2$; $y_B = 2\sqrt{2}\cdot\sin(3\pi/4) = 2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}/2) = 2$. Donc B(−2, 2). I : $x_I = 2\cdot\cos(\pi/2) = 0$; $y_I = 2\cdot\sin(\pi/2) = 2$. Donc I(0, 2). (Vérification : milieu de [AB] = ((2−2)/2, (2+2)/2) = (0, 2) = I ✓.)

4°/ a- $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$, donc $\cos(\pi/12) = \cos(\pi/3 - \pi/4) = \cos(\pi/3)\cos(\pi/4) + \sin(\pi/3)\sin(\pi/4) = (1/2)(\sqrt{2}/2) + (\sqrt{3}/2)(\sqrt{2}/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$. Et $\sin(\pi/12) = \sin(\pi/3 - \pi/4) = \sin(\pi/3)\cos(\pi/4) - \cos(\pi/3)\sin(\pi/4) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$.

b- $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4 = \sin(\pi/12)$, donc l'équation s'écrit $\sin(2x) = \sin(\pi/12) \Leftrightarrow 2x = \pi/12 + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \pi/12 + 2k\pi = 11\pi/12 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow x = \pi/24 + k\pi$ ou $x = 11\pi/24 + k\pi$. Donc $S_{\mathbb{R}} = \{\pi/24 + k\pi\ ;\ 11\pi/24 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2 — Exercice n° 2 — Étude d'une fonction polynomiale et tangentes

1°/ a- $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

b- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$. Signe de f' : $f' > 0$ sur $]-\infty, 0[$ (3·neg·neg > 0) et sur $]2, +\infty[$; $f' < 0$ sur $]0, 2[$. D'où : f strictement croissante sur $]-\infty, 0]$, strictement décroissante sur $[0, 2]$, strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Maximum local $f(0) = 0$; minimum local $f(2) = 8 - 12 = -4$.

2°/ a- Au point A(0, 0) : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. La tangente (T) a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 0$, soit (T) : $y = 0$ (l'axe (O, i)).

b- (T) recoupe (C) lorsque $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (double, point de tangence) ou $x = 3$. Donc (T) recoupe (C) au point B(3, 0).

3°/ a- La tangente en M(m) est horizontale $\Leftrightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $m = 2$.

b- Pour m = 0 : point A(0, 0) (maximum local). Pour m = 2 : point (2, −4) (minimum local). Aux deux points, la tangente est horizontale (d'équation $y = 0$ et $y = -4$ respectivement).

Exercice 3 — Exercice n° 3 — Continuité, dérivabilité et asymptote

1°/ a- Pour $x < 0$: $x + 1$ peut s'annuler en $x = -1$, mais comme $x < 0$, il faut exclure −1. Plus précisément, la branche $(x^2+2x+3)/(x+1)$ est définie pour $x \neq -1$; pour $x < 0$ et $x \neq -1$, elle est définie. Pour $x \geq 0$: $x^2 + 9 > 0$, donc $\sqrt{(x^2+9)}$ est définie. Ainsi $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup [0, +\infty[= \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. (Note : on peut prolonger par continuité en −1, mais f n'est pas définie en −1.)

b- En 0 : $\lim(x\to 0^-) f(x) = \lim (x^2+2x+3)/(x+1) = (0+0+3)/(0+1) = 3$; et $f(0) = \sqrt{9} = 3$. Donc $\lim f = f(0)$: f est continue en 0.

2°/ a- Pour $x < 0$: $f(x) - (x + 1) = (x^2+2x+3)/(x+1) - (x+1) = [x^2+2x+3 - (x+1)^2]/(x+1) = (x^2+2x+3 - x^2 - 2x - 1)/(x+1) = 2/(x+1)$. Comme $\lim(x\to-\infty) 2/(x+1) = 0$, la droite $\Delta : y = x + 1$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

b- Dérivabilité à gauche en 0 : f est rationnelle sur $]-\infty,0[$, $f'(x) = 1 - 2/(x+1)^2$, donc $\lim(x\to 0^-) f'(x) = 1 - 2/1 = -1$: f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$. Dérivabilité à droite : $\lim(x\to 0^+) [f(x) - f(0)]/x = \lim [\sqrt{(x^2+9)} - 3]/x = \lim [x^2/(\sqrt{(x^2+9)}+3)]/x = \lim x/(\sqrt{(x^2+9)}+3) = 0$. Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$. Comme $f'_g(0) = -1 \neq 0 = f'_d(0)$, f n'est pas dérivable en 0 ; (C_f) admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes de pentes −1 (à gauche) et 0 (à droite, horizontale).

3°/ $f(-0{,}01) = f(0 + (-0{,}01)) \approx f(0) + (-0{,}01)\cdot f'_g(0) = 3 + (-0{,}01)\cdot(-1) = 3 + 0{,}01 = 3{,}01$.

Exercice 4 — Exercice n° 4 — Angles orientés et ensemble de points

1°/ a- Les angles géométriques aux sommets : angle(A) = $2\pi/3$, angle(B) = $\pi/4$, donc angle(C) = $\pi - 2\pi/3 - \pi/4 = 12\pi/12 - 8\pi/12 - 3\pi/12 = \pi/12$. Ainsi $(CA, CB) \equiv \pi/12\ [2\pi]$ (mesure principale).

b- $(AB, BC) = (AB, BA) + (BA, BC) = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$. Comme $5\pi/4 > \pi$, la mesure principale est $5\pi/4 - 2\pi = -3\pi/4$. Donc $(AB, BC) \equiv -3\pi/4\ [2\pi]$.

2°/ a- C $\in \Gamma$ car, par définition, $\Gamma = \{M / (MA, MB) \equiv \pi/12\}$ et $(CA, CB) \equiv \pi/12$ (question 1°).

b- Γ est le lieu des points M d'où l'on voit le segment [AB] sous l'angle orienté $\pi/12$: d'après le théorème de l'angle inscrit, c'est la réunion de deux arcs de cercle passant par A et B. L'un de ces arcs contient C (c'est l'arc du cercle circonscrit (C) à ABC) ; l'autre est l'arc symétrique par rapport à (AB).

منصة التعليم الذكي

3°/ a- $M \in \Gamma \Leftrightarrow (MA, MB) \equiv \pi/12\ [2\pi] \Leftrightarrow (MA, MB) \equiv (CA, CB)\ [2\pi]$ (puisque $(CA, CB) = \pi/12$).

b- Deux points M et C voient le segment [AB] sous le même angle orienté $(MA, MB) = (CA, CB)$: d'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit, M et C appartiennent à un même arc de cercle passant par A et B. Cet arc est précisément l'arc du cercle circonscrit (C) à ABC contenant C. Donc $M \in (C)$.

4°/ a- D est sur le cercle circonscrit (C) ; D est diamétralement opposé à C, donc l'angle orienté (DA, DB) est l'angle inscrit interceptant le même arc que (CA, CB) mais depuis le point diamétralement opposé. Plus directement : $M \in (C)$ (arc contenant C) $\Rightarrow (MA, MB) \equiv (CA, CB) \equiv \pi/12$ ou $\equiv \pi - \pi/12$ selon l'arc ; pour D sur l'autre arc, $(DA, DB) \equiv \pi/12$ également (les deux arcs définissent le même ensemble Γ). Donc $D \in \Gamma$.

b- On construit le cercle circonscrit (C) à ABC : Γ coïncide avec l'arc de (C) contenant C (privé de A et B) ; le second arc de Γ est l'arc symétrique. On trace donc (C) puis on indique les deux arcs répondant à la condition $(MA, MB) \equiv \pi/12$.

منصة التعليم الذكي